

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN A

#### Exercicio 1:

a)  $A^{-1} = A - 2I \Leftrightarrow I = A(A - 2I) = (A - 2I)A$

$$A(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & b - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a(b - 2) \\ a(b - 2) & a^2 + b(b - 2) \end{pmatrix}$$

Polo tanto:

$$A(A - 2I) = I \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a(b - 2) = 0 \\ a^2 + b(b - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$Solución: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b)

$$i) \det(M) = \begin{vmatrix} m+2 & -1 & m+1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ -1 & -2 & m+1 \end{vmatrix} = (m+2)(m+1)^2 + (m+1)^2 = (m+3)(m+1)^2$$

$$\det(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Se  $m = -3$ , hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Se  $m = -1$ , hai un menor de orde 2 non nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Polo tanto:

$\begin{aligned} &Se\ m \in \mathbb{R} - \{-3, -1\}\ \text{entón}\ \text{rang}(M) = 3 \\ &Se\ m = -3\ \text{ou}\ m = -1, \text{entón}\ \text{rang}(M) = 2 \end{aligned}$

ii) Substituíndo o valor de  $m$  na matriz  $M$ , resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$

$Solución: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN A

#### Exercicio 2:

a) Os vectores  $\overrightarrow{BC} = (2,6,1)$  e  $\overrightarrow{BD} = (1,4,1)$  son non proporcionais. Polo tanto, os puntos  $B(1, -5, -1)$ ,  $C(3,1,0)$  e  $D(2, -1,0)$  determinan un plano  $\pi$ :

$$\pi: \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ 6 & 4 & y+5 \\ 1 & 1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - y + 2z - 5 = 0}$$

Para determinar  $m$ , bastará ter en conta que  $A \in \pi$  e polo tanto:

$$2m + 1 + 2m - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Tamén poderíamos obter  $m$ , impoñendo a condición  $\text{rang}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = 2$ , é dicir:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 4 & m+1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(m-1) - 4 + 2(m+1) = 0 \Rightarrow 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1$$

b) O vector director,  $\overrightarrow{v_r}$ , da recta e o vector normal,  $\overrightarrow{n_\pi}$ , ao plano son:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (-2, 1, -2) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (2, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \text{ e } \overrightarrow{n_\pi} \text{ son proporcionais. Polo tanto:}$$

$$\boxed{r \text{ e } \pi \text{ son perpendiculares: } r \perp \pi}$$

c) Calculamos as ecuacións paramétricas da recta  $r$ :

$$\left. \begin{array}{l} P(3, -4, -7) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (-2, 1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = -7 - 2\lambda \end{cases}$$

Un punto xenérico da recta será:  $(3 - 2\lambda, -4 + \lambda, -7 - 2\lambda)$ . Determinamos o valor de  $\lambda$  para que o punto diste 9 unidades do plano  $\pi$ :

$$9 = \frac{|2(3 - \lambda) - (-4 + \lambda) + 2(-7 - 2\lambda)|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} \Rightarrow 27 = |-9 - 9\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 27 = -9 - 9\lambda \Rightarrow \lambda = -4 \\ -27 = -9 - 9\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Substituíndo estes valores nas ecuacións paramétricas da recta, obtéñense dous puntos da recta que distan 9 unidades do plano:

$$\boxed{A(11, -8, 1) \text{ e } B(-1, -2, -11)}$$

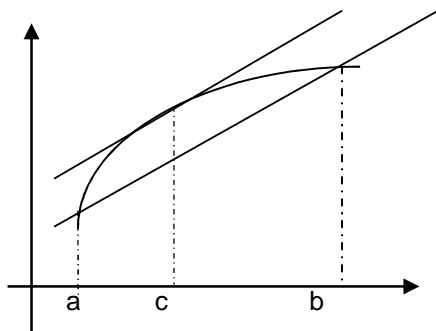
# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN A

#### Exercicio 3:

a) *Teorema do valor medio do cálculo diferencial:* Se  $f(x)$  é continua en  $[a,b]$  e derivable en  $(a,b)$ , entón existe algún punto  $c \in (a,b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



*Interpretación xeométrica:*

Nas hipóteses do teorema, existe algún punto intermedio no que a tanxente á gráfica de  $f(x)$  é paralela á corda que une os puntos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

b) Indeterminación  $\frac{0}{0}$

$$i. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-\sqrt{2-x})(x+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{x^2-2+x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

Multiplicamos polo conxugado do denominador

Factorizamos o denominador e simplificamos

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2-x})}{(x-1)(x+2)} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Tamén pode facerse por L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2-x}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$ii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}} =$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)+1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

L'Hôpital

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN A

#### Exercicio 4:

- a)  $f(x)$  é a primitiva de  $f'(x)$  pasando polo punto  $(1,0)$ . Mediante o método de integración por partes, calculamos a integral indefinida de  $f'(x)$

$$\int \frac{1-\ln x}{x^2} dx = \int x^{-2}(1-\ln x) dx = -\frac{1-\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1-\ln x}{x} + \frac{1}{x} + K = \frac{\ln x}{x} + K$$

$\uparrow$   
 $\left[ \begin{array}{l} u = 1 - \ln x \Rightarrow du = -\frac{1}{x} dx \\ dv = x^{-2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right]$

Usando que  $f(1) = 0$  determinamos o valor de  $K$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = K \end{array} \right\} \Rightarrow K = 0$$



Polo tanto

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- b) Estudamos o signo de  $f''(x)$ :

$$f''(x) = \frac{-\frac{x^2}{x} - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{3/2}$$

	$(0, e^{3/2})$	$(e^{3/2}, \infty)$
$f''(x)$	$< 0$	$> 0$
$f(x)$		

Cóncava en  $(0, e^{3/2})$

Convexa en  $(e^{3/2}, \infty)$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN B

#### Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes:  $C = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ ; matriz ampliada:  $A = \begin{pmatrix} m & 3 & 4 & m \\ 1 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de  $C$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 16m - 12 - 15 + 16 - 15m + 12 = m + 1;$$

Polo tanto

- $m = -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2$
- $m \neq -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3$

Cálculo do rango da matriz ampliada:

- $m \neq -1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$  (sempre  $\text{rang}(A) \geq \text{rang}(C)$ )
- Se  $m = -1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Discusión:

$m = -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 2 < 3 = \text{rang}(A)$ . Sistema incompatible. Non ten solución  
 $m \neq -1 \Rightarrow \text{rang}(C) = 3 = \text{rang}(A) = n^\circ$  de incógnitas. Sistema compatible determinado.  
Solución única

b) Para  $\boxed{m = 0}$

Sistema homoxéneo. Por a) é un sistema compatible determinado. Polo tanto

$$\boxed{x = y = z = 0}$$

Para  $\boxed{m = 1}$ . Por a), é un sistema compatible determinado, ten solución única que calculamos pola regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = -1/2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}} = 1/2$$

$$\boxed{x = 1/2; \quad y = -1/2; \quad z = 1/2}$$

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN B

#### Exercicio 2:

a) Como o plano  $\pi$  debe ser perpendicular á  $r$ , entón o vector director da recta,  $\vec{v}_r$ , é un vector normal a  $\pi$ . Polo tanto:

$$\vec{n}_\pi = \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2)$$

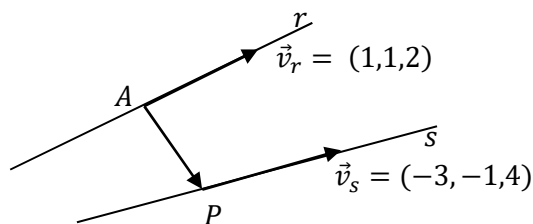
Entón, como  $\vec{n}_\pi = (1, 1, 2)$  é un vector normal ao plano e  $P(2, 5, -2)$  é un punto do plano

$$x - 2 + y - 5 + 2(z + 2) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y + 2z - 3 = 0}$$

b) Calculamos o vector director da recta  $s$ :

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3, -1, 4)$$

Como os vectores  $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$  e  $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-3, -1, 4)$  non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$A(0, 2, 0) \in r; \quad P(2, 5, -2) \in s$$

e consideramos o vector  $\overrightarrow{AP} = (2, 3, -2)$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector  $\overrightarrow{AP}$  que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -22 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas crúzanse}}$$

c) Dado que  $A(0, 2, 0) \in r$ ,  $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$ ,  $(\lambda, 2 + \lambda, 2\lambda)$  é un punto xenérico de  $r$ , igualando as distancias deste punto xenérico aos puntos  $P$  e  $Q$ :

$$(\lambda - 2)^2 + (2 + \lambda - 5)^2 + (2\lambda + 2)^2 = (\lambda + 1)^2 + (2 + \lambda - 4)^2 + (2\lambda - 2)^2$$

é dicir:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

$$8\lambda = -8 \Rightarrow \lambda = -1$$

Substituíndo este valor de  $\lambda$  na expresión do punto xenérico de  $r$ , obtemos que o punto da recta  $r$  que equidista dos puntos  $P$  e  $Q$  é:

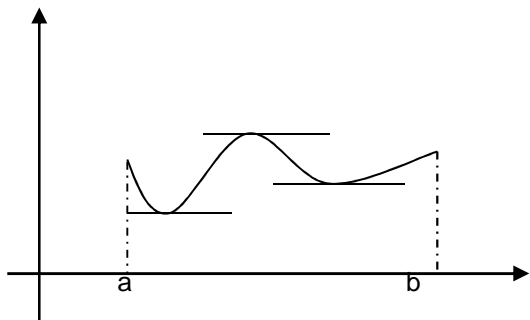
$$\boxed{R(-1, 1, -2)}$$

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN B

#### Exercicio 3:

a) *Teorema de Rolle:* Se  $f(x)$  é continua en  $[a, b]$  e derivable en  $(a, b)$  e ademais  $f(a) = f(b)$ , entón existe polo menos un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .



*Interpretación xeométrica:* Se se cumpren as hipóteses do teorema, existe polo menos un punto  $c \in (a, b)$  no que a recta tanxente é paralela ao eixe de abscisas.

b)

$$f(x) = 2x + \frac{5}{2}\ln(1+x^2) \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{5x}{1+x^2} = \frac{2x^2 + 5x + 2}{1+x^2}$$

Polo tanto, como  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 2$ , a ecuación da recta tanxente no punto correspondente a  $x = 0$ :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

Determinamos os puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Calculamos a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{5(1+x^2) - 10x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{5-5x^2}{(1+x^2)^2}$$

Polo tanto:

$$f''(-2) < 0$$

$$f''(-\frac{1}{2}) > 0$$

E así:

$$\begin{aligned} &\text{Máximo relativo no punto } \left(-2, -4 + \frac{5\ln 5}{2}\right) \\ &\text{Mínimo relativo no punto } \left(-\frac{1}{2}, -1 + \frac{5\ln(5/4)}{2}\right) \end{aligned}$$

# Exemplos de resposta / Solucións

## CONVOCATORIA DE XUÑO

### OPCIÓN B

#### Exercicio 4:

a) Para que  $f(x)$  sexa derivable en  $x = 1$  ten que ser continua en  $x = 1$ , polo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \\ f(1) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

Miramos se para este valor de  $a$ , existe o límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

para iso, calculamos os límites laterais

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h-2)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h^2 - 6h + 3 - 3}{h} = -6$$

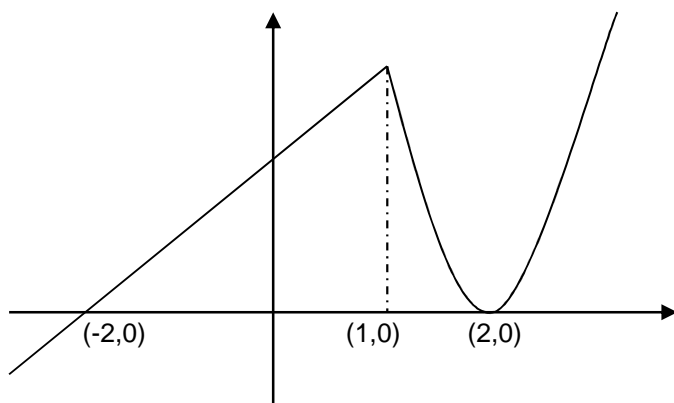
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h+2-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Vemos que os límites laterais non coinciden. En conclusión:

$f(x)$  non é derivable en  $x = 1$  para ningún valor de  $a$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 3(x - 2)^2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (x + 2) dx + \int_1^2 3(x - 2)^2 dx = \left[ \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 + [(x - 2)^3]_1^2 = \frac{1}{2} + 2 - (2 - 4) + 0 - (-1)^3 \\ &= \frac{1}{2} + 2 + 2 + 1 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

$$A = \frac{11}{2} u^2$$